Les parties I, II, III et IV sont indépendantes.

Partie I .

Déterminer la solution de l'équation différentielle sur R : $4\,y'' + 5\,y' + y = 0$

vérifiant $y(0) = \frac{1}{2}$ et $y'(0) = \frac{-3}{8}$.

Partie II .

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(t) = 0 & \text{pour } t < 0 \\ f(t) = \frac{1}{6}\,e^{\frac{-t}{4}} + \frac{1}{3}\,e^{-t} & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$$

1- Montrer que f est une densité de probabilité d'une variable aléatoire continue T.
On estime que T indique la durée, en heures, pendant laquelle on peut utiliser un vaccin, après la sortie de son conditionnement.

2- Déterminer la fonction de répartition F de la variable T.

3- Calculer l'espérance de T que l'on notera $E(T)$.

4- Calculer $p(T \leq E(T))$.

Partie III .

Un berger trie un groupe de 10 chèvres dont 5 sont déjà vaccinées. Les chèvres entrent une par une, au hasard, dans un sas. Le berger repère, à chaque passage d'une chèvre dans le sas, si elle est déjà vaccinée ou non. On note X la variable aléatoire indiquant, dans le groupe de 10 chèvres, le rang d'apparition dans le sas de la dernière chèvre non vaccinée.

1- Quel est l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X ?

2- Déterminer la loi de X.

3- Calculer l'espérance de la variable aléatoire X.

Partie IV .

Après vaccination toutes les chèvres rejoignent le reste du troupeau. Le troupeau comporte au total n chèvres qui ont à leur disposition deux abris A_1 et A_2. Suite à une forte pluie, chaque chèvre, indifféremment, s'abrite dans l'abri A_1, dans l'abri A_2 ou reste dehors. On suppose que chaque abri peut contenir l'ensemble du troupeau et que les chèvres agissent indépendamment les unes des autres. On appelle Y la variable aléatoire désignant, à un instant donné, le nombre de chèvres se trouvant dans l'abri A_1 et Z la variable aléatoire désignant le nombre d'abris vides.

A- Etude de Y.

1- Quelle est la loi de Y ? Donner, en fonction de n, son espérance et sa variance.

2- On suppose que $n = 450$.

a- Par quelle loi peut-on approcher la loi de Y ?
b- Calculer $p(Y > 160)$.
c- Déterminer le plus petit entier m tel que $p(Y > m) < 0{,}05$.

B- Etude du couple de variables aléatoires (Y, Z) .

1- a- Que peut-on dire de l'événement $((Y = 0) \cap (Z = 0))$?

b- Montrer que $p((Y = 0) \cap (Z = 2)) = \dfrac{1}{3^n}$.

c- En déduire $p((Y = 0) \cap (Z = 1))$.

2- Soit k un entier naturel compris entre 1 et n.

a- Que vaut $p((Y = k) \cap (Z = 2))$?
b- Calculer $p((Y = k) \cap (Z = 1))$.
c- En déduire $p((Y = k) \cap (Z = 0))$.

3- Déterminer la loi de Z et calculer son espérance.

4- Les variables Y et Z sont-elles indépendantes ?